Estatística

TESTE de HIPÓTESE

Prof. Antonio Estanislau Sanches
2017

Material didático do Prof. Marllus Gustavo Ferreira Passos das Neves, da UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS, adaptado do material elaborado pelos Prof. Wayne Santos de Assis e Christiano Cantarelli Rodrigues.

Teste de Hipóteses

Hipótese Estatística

Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações

Teste de Hipótese

Procedimento para análise da hipótese e tomada de decisão

Conjectura (população) → Hipótese Estatística

Regra para decidir se a hipótese é verdadeira ou não → Teste de Hipótese

Exemplo de Teste de Hipóteses

Experiência passada mostrou que as notas de Estatística, estão normalmente distribuídas com média μ = 5,5 e desvio padrão σ = 2,0. No semestre atual, uma turma com n = 64 alunos apresentou uma média de 5,9. Teste a hipótese de este resultado evidencia uma melhora no rendimento dessa turma, em relação à anterior, com um nível de significância de 5%.

Hipóteses:

H_0: $\mu = 5,5$

H_1: $\mu > 5,5$

$\alpha = 5\%$

Dados:

$\sigma = 2,0$

$n = 64$

$\ddot{X} = 5,9$

Trata-se de um teste unilateral à direita com ***σ conhecido***

A variável Teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Logo:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{5,9 - 5,5}{2,0 / \sqrt{64}} = \frac{0,4}{2,0 / 8} = \frac{3,2}{2,0} = 1,60$$

Exemplo de Teste de Hipóteses

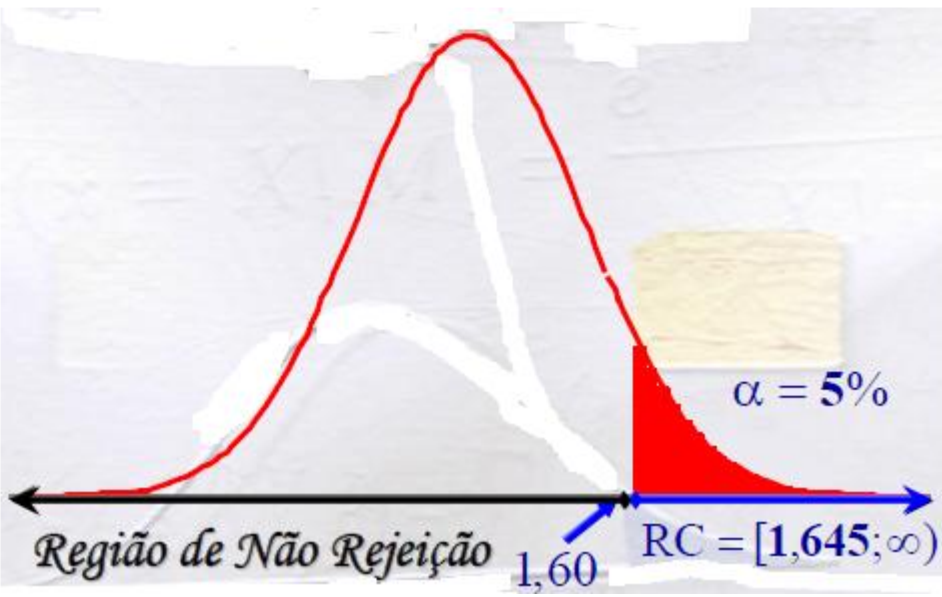
Experiência passada mostrou que as notas de Estatística, estão normalmente distribuídas com média μ = 5,5 e desvio padrão σ = 2,0. No semestre atual, uma turma com n = 64 alunos apresentou uma média de 5,9. Teste a hipótese de este resultado evidencia uma melhora no rendimento dessa turma, em relação à anterior, com um nível de significância de 5%.

Hipóteses:
H_0: μ = 5,5
H_1: μ > 5,5
α = 5%

Dados:
σ = 2,0
n = 64
Ẍ = 5,9

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{5,9 - 5,5}{2,0 / \sqrt{64}} = \frac{0,4}{2,0/8} = \frac{3,2}{2,0} = 1,60$$

O valor crítico Z_c é tal que: Φ(Z_c) = 1- α = 1 – 0,05 = 95%.
Então $\mathbf{Z_c}$ **= INV.NORMP(1-0,05) = *1,645***. *Assim, a região de rejeição RC será: RC = [1,645; ∞)*



DECISÃO e CONCLUSÃO:
Como z = 1,60 ∉ RC
ou ***1,60 < 1,645****, Então:*
ACEITA-SE $\mathbf{H_0}$, *isto é, a 5% de significância não se pode afirmar que os resultados desta turma são melhores.*

Teste de Hipóteses

Seja um engenheiro interessado na taxa de sedimentação de um metal pesado em um estuário, originado de um riacho urbano

X = taxa de sedimentação de um metal pesado em um estuário, originado de um riacho urbano

X ~ distribuição de probabilidades

Podemos fazer uma hipótese a respeito da taxa média de sedimentação, expressando isto formalmente como

$$H_0: \mu = 0{,}15\ \mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$$
$$H_1: \mu \neq 0{,}15\ \mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$$

Teste de Hipóteses

O interesse está em uma afirmação sobre a taxa média populacional de sedimentação → hipótese

H_0: $\mu = 0{,}15\ \mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$ → hipótese nula

H_1: $\mu \neq 0{,}15\ \mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$ → hipótese alternativa

Hipótese alternativa bilateral, pois μ pode ser maior ou menor que $0{,}15\ \mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$

De onde vem H_0?

- Resultado de experiência anterior, Conhecimento do processo ou testes prévios
- Resultado da aplicação de uma teoria ou modelo
- Resultado de imposições externas como Especificações técnicas

Teste de Hipóteses

Exemplo

Interesse → **Média de uma grandeza igual a 0,15**

H_0: $\mu = 0,15$ (Hipótese nula)

H_1: $\mu \neq 0,15$ (Hipótese alternativa bilateral)

H_1: $\mu < 0,15$ (Hipótese alternativa unilateral inferior)

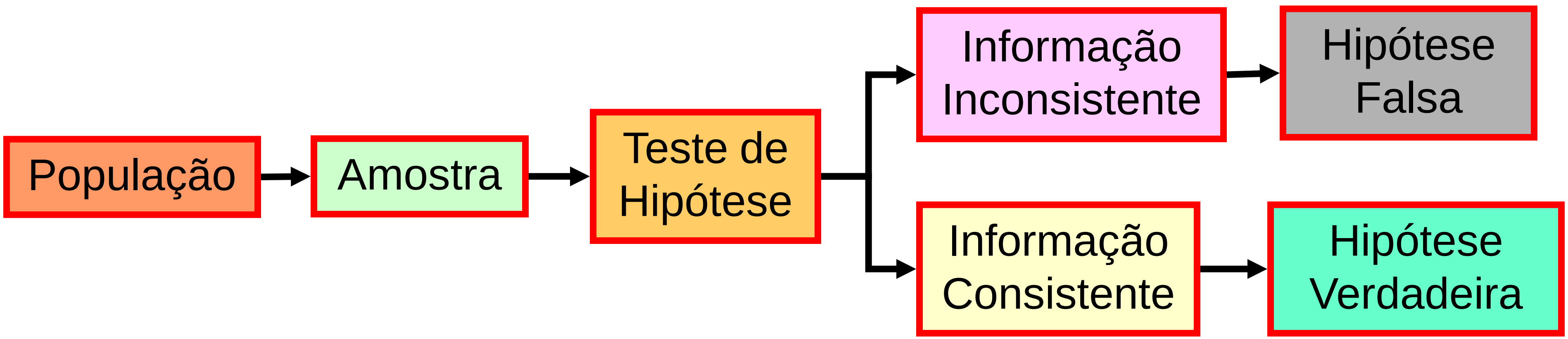
H_1: $\mu > 0,15$ (Hipótese alternativa unilateral superior)

H_0 é aquela que queremos testar;

A rejeição de **H_0** leva sempre à aceitação de **H_1**

Teste de Hipóteses

Estrutura de um Teste de Hipótese



A verdade ou a falsidade de uma determinada hipótese pode nunca ser conhecida com certeza, pois trabalhamos com amostras.

Um teste deve ser desenvolvido, tendo-se em mente a probabilidade de alcançar uma conclusão errada (impossibilidade prática de se realizar um censo)

Teste de Hipóteses

Voltemos ...

Toma-se uma amostra de tamanho n e se determina a média amostral

- $\bar{X}$ próximo de 0,15 → evidência que a média verdadeira é 0,15 → não rejeitamos H_0
- $\bar{X}$ longe de 0,15 → H_1 é válida

O que determina o "longe" e o "perto"?

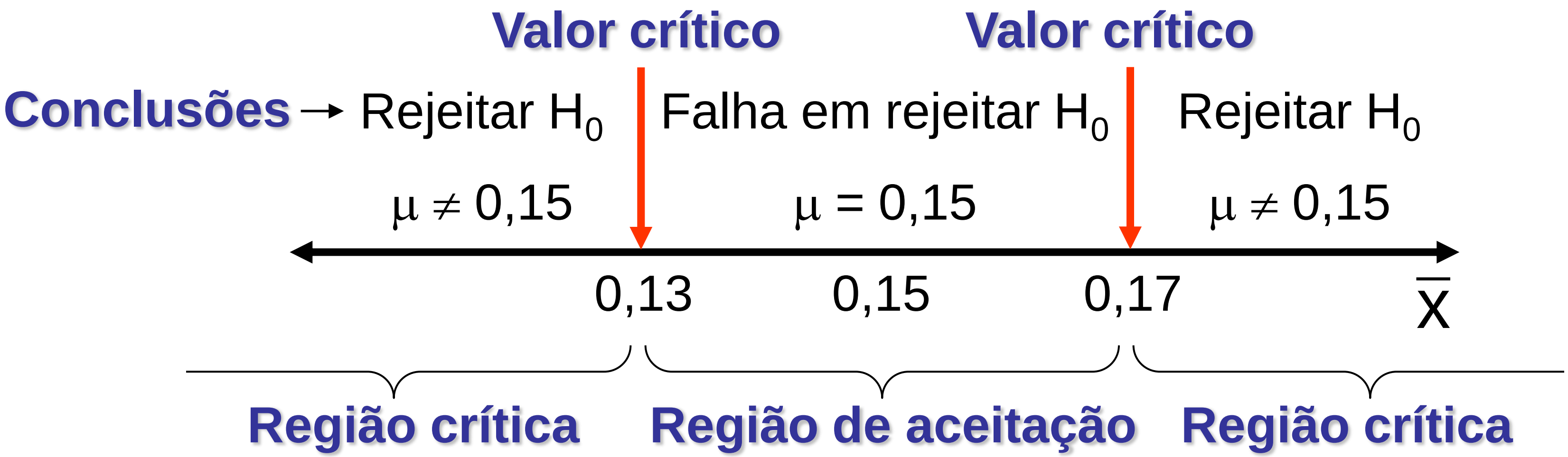
São valores limites → valores críticos

Teste de Hipóteses

Suponhamos que:

1) se $0{,}13 < \bar{X} < 0{,}17 \rightarrow$ não rejeitamos H_0

2) Se $\bar{X} < 0{,}13$ ou $\bar{X} > 0{,}17 \rightarrow$ rejeitamos H_0 em favor de H_1



Tipos de Erros no Teste de Hipóteses

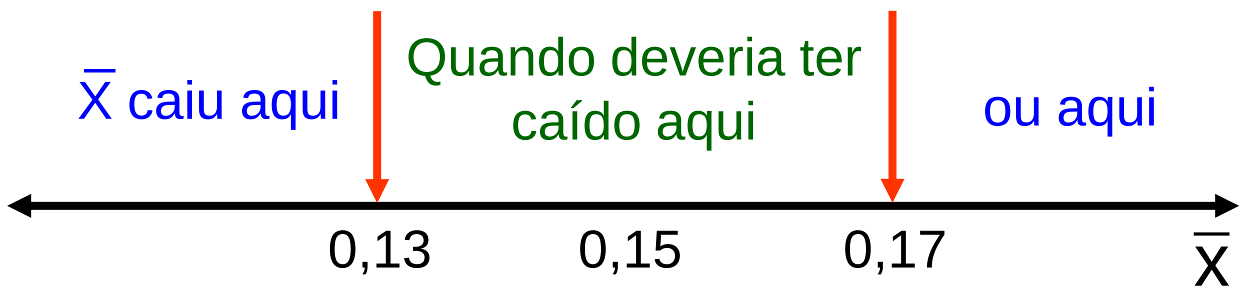
Possibilidades de conclusões erradas

A taxa média **pode ser igual a** 0,15 $\mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$ **(H_0)**, mas para a amostra, os valores médios podem estar na região crítica

Conclusão do teste: **Rejeitar a hipótese nula**

Mas: **A hipótese nula é verdadeira!**

Logo: **Erro tipo I**



α = P(Erro I) = P(Rejeitar H_0 quando H_0 for verdadeira)

Tipos de Erros no Teste de Hipóteses

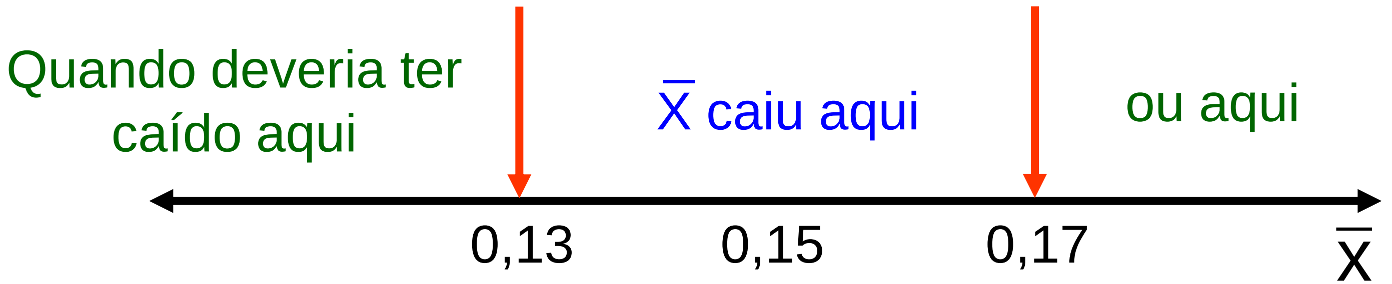
Possibilidades de conclusões erradas

A taxa média **é diferente de** 0,15 $\mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$ **(H_0 é falsa)**, mas para a amostra, os valores médios podem estar na região de aceitação

Conclusão do teste: **Deixa de rejeitar a hipótese nula**

Mas: **A hipótese nula é falsa!**

Logo: **Erro tipo II**



β = P(Erro II) = P(Falha em rejeitar H_0 quando H_0 for falsa)

Tipos de Erros no Teste de Hipóteses

Erro Tipo I

Rejeitar a hipótese nula H_o quando ela for verdadeira

Erro Tipo II

Deixar de rejeitar a hipótese nula H_o quando ela é falsa

Decisões do Teste de Hipótese

Decisão	H_o Verdadeira	H_o Falsa
Deixar de rejeitar H_o	Não há erro	Erro tipo II
Rejeitar H_o	Erro tipo I	Não há erro

Tipos de Erros no Teste de Hipóteses

Cálculo da Probabilidade de Acontecer o Erro Tipo I

P(Erro I) = P(Rejeitar H_0 quando H_0 for verdadeira)

Esta probabilidade é representada por α, que é chamado de *nível de significância*

Cálculo da Probabilidade de Acontecer o Erro Tipo II

P(Erro II) = P(Falha em rejeitar H_0 quando H_0 for falsa)

Esta probabilidade é representada por β

Tipos de Erros no Teste de Hipóteses

Importante!!!

- As duas taxas de erro α e β estão relacionadas negativamente, de modo que a redução de α implica no aumento de β e vice-versa.

- O único meio de reduzir ambos os tipos de erro é aumentando o tamanho da amostra, o que nem sempre é viável.

nível de significância

- Em geral, a preocupação está voltada para o erro tipo I (α), pois na maioria dos casos ele é considerado o mais grave.

Construção do Teste de Hipóteses

Passos para construção de um teste de hipóteses

1. Definir as hipóteses estatísticas.

2. Fixar a taxa de erro aceitável (α - nível de significância).

3. Escolher a estatística para testar a hipótese e verificar as pressuposições para o seu uso.

4. Usar as observações da amostra para calcular o valor da estatística do teste.

5. Decidir sobre a hipótese testada e concluir.

Construção do Teste de Hipóteses

EXEMPLO

Avaliar a taxa de sedimentação de um metal pesado em um estuário, originado de um riacho urbano, para uma situação onde deseja-se que esta taxa tenha um valor de 0,15 $\mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$. Calcule a probabilidade de acontecer erro tipo I e II para um valor da média de uma amostra entre 0,13 $\mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$ e 0,17 $\mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$. Admita uma amostra com tamanho n = 10 e desvio padrão σ = 0,06 $\mu g \cdot cm^{-2} \cdot ano^{-1}$.

Procedimento geral para Testes de Hipóteses

1) A partir do contexto do problema, identifique o parâmetro de interesse → μ, σ^2, σ, p, $\mu_1 - \mu_2$, ...
2) Estabeleça a hipótese nula H_0 → $\mu = 0{,}15$, $\mu_1 = \mu_2$, ...
3) Especifique uma hipótese alternativa associada H_1 → $\mu > 0{,}15$, $\mu_1 \neq \mu_2$, ...
4) Escolha um nível de significância α → 1%, 5%, ... e calcule o score crítico (z_c ou t_c)
5) Estabeleça uma estatística apropriada de teste → z, t, ...
6) Estabeleça uma região de rejeição para a estatística
7) Calcule a grandeza amostral necessária ($\overline{X}$, s^2, ...), substitua-a na equação da estatística de teste ($z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, ...) e calcule aquele valor
8) Decida de H_0 deve ser ou não rejeitada e reporte isto no contexto do problema (compare t com t_c ou z com z_c)

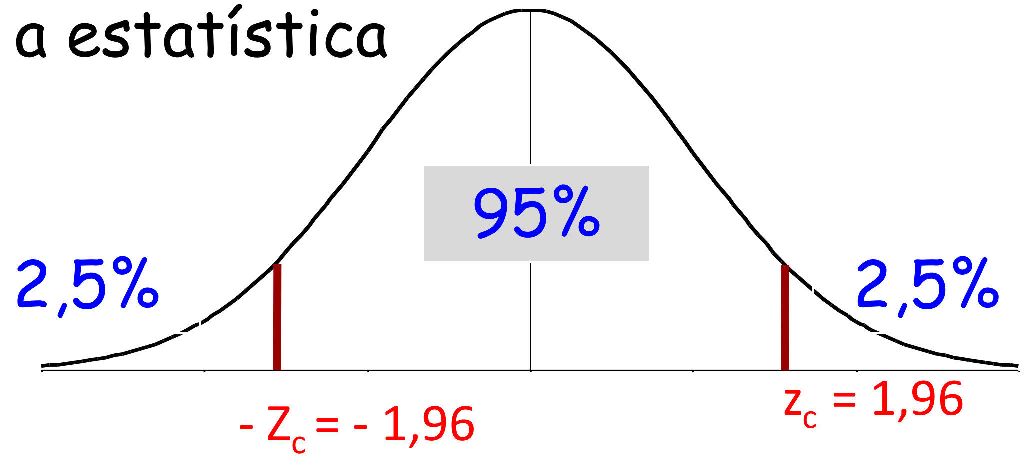
Aplicações

Os sistemas de escapamento de uma aeronave funcionam devido a um propelente sólido. A taxa de queima desse propelente é uma característica importante do produto. As especificações requerem que a taxa média de queima seja de 50 cm/s. Sabemos que o desvio-padrão da taxa de queima é de σ = 2 cm/s. O experimentalista decide especificar uma probabilidade de erro tipo I, ou nível de significância, de α = 0,05. Ele seleciona uma amostra aleatória de n = 25 e obtém uma taxa média amostral de queima de 51,3 cm/s. Que conclusões poderiam ser tiradas?

1) Parâmetro de interesse → μ
2) Hipótese nula H_0 → μ = 50 cm/s
3) Hipótese alternativa H_1 → $\mu \neq$ 50 cm/s
4) Nível de significância → α = 0,05 e z_c = 1,96 e z_c = - 1,96)
5) Estatística de teste → z (pois conhecemos σ)

Aplicações

6) Região de rejeição para a estatística



7) Grandezas amostrais necessárias

INV.NORMP (0,975) = 1,96

$$\bar{X} = 51{,}3 \text{ cm/s}$$

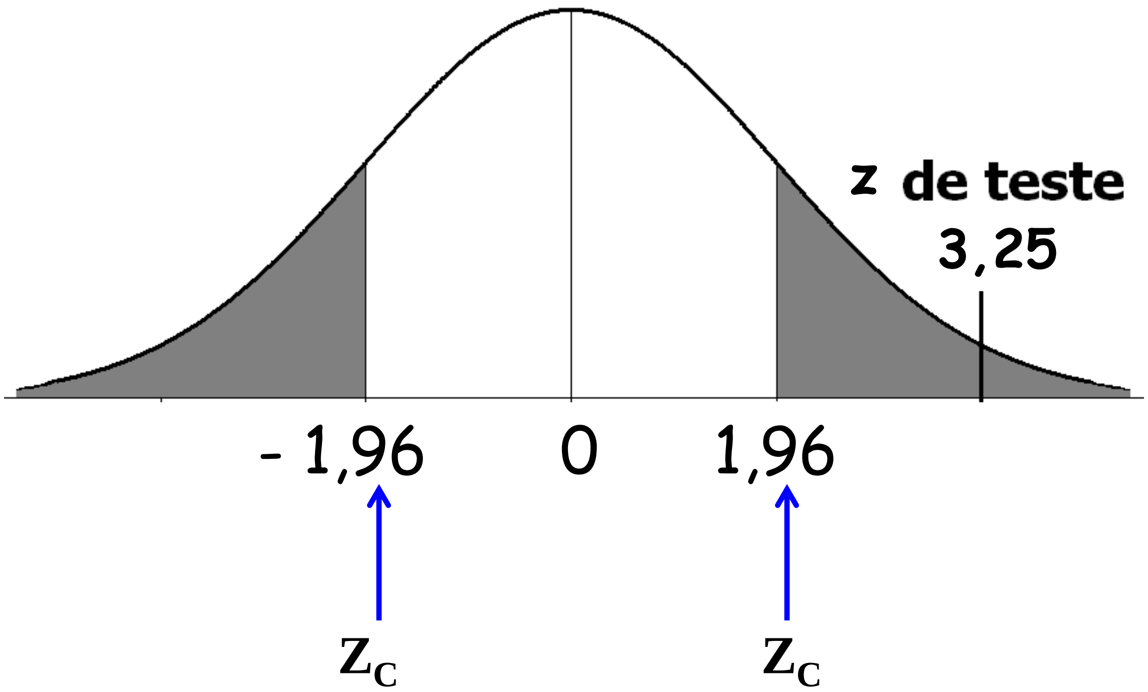
Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$z = \frac{51{,}3 - 50}{\dfrac{2}{\sqrt{25}}} = 3{,}25$$

Aplicações

8) Decisão



Como z de teste caiu na região crítica, a hipótese H_0 tem que ser rejeitada, ou seja, concluímos que a taxa média de queima difere de 50 cm/s. De fato, há uma forte evidência de que a taxa média de queima exceda 50 cm/s, ao nível de significância de 5%.

Aplicações

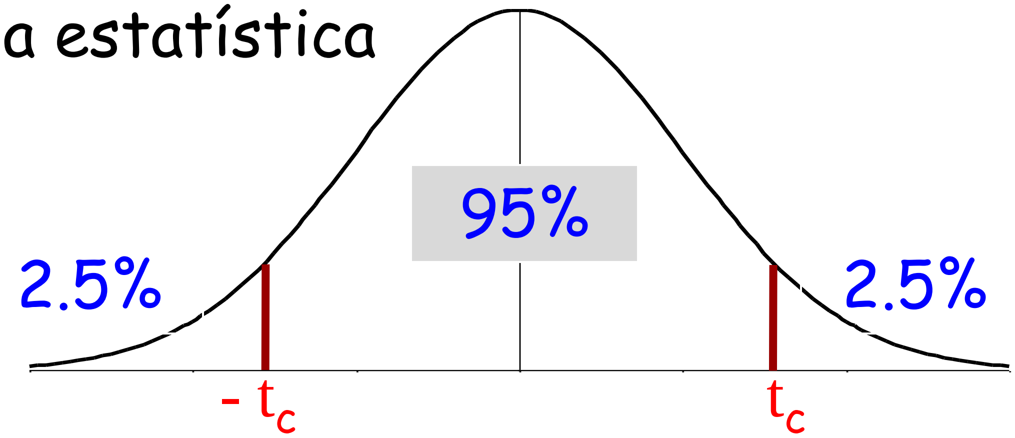
Um grupo de defesa do consumidor gostaria de avaliar a potência média de aparelhos de ar-condicionado. Uma amostra aleatória simples de 36 aparelhos é selecionada e testada por um espaço de tempo fixo e suas potências são registradas da seguinte maneira: Há evidências de que a potência média seja diferente de 9,0? (utilize nível de significância de 0,05)

8,9	9,1	9,2	9,1	8,4	9,5	9,0	9,6	9,3	9,3	8,9	9,7
8,7	9,4	8,5	8,9	8,4	9,5	9,3	9,3	8,8	9,4	8,9	9,3
9,0	9,2	9,1	9,8	9,6	9,3	9,2	9,1	9,6	9,8	9,5	10,0

1) Parâmetro de interesse → μ
2) Hipótese nula H_0 → $\mu = 9$ Btus
3) Hipótese alternativa H_1 → $\mu \neq 9$ Btus
4) Nível de significância → $\alpha = 0{,}05$
5) Estatística de teste → t (não conhecemos σ)

Aplicações

6) Região de rejeição para a estatística



7) Grandezas amostrais necessárias

8,9	9,1	9,2	9,1	8,4	9,5	9,0	9,6	9,3	9,3	8,9	9,7
8,7	9,4	8,5	8,9	8,4	9,5	9,3	9,3	8,8	9,4	8,9	9,3
9,0	9,2	9,1	9,8	9,6	9,3	9,2	9,1	9,6	9,8	9,5	10,0

$$\overline{X} = 9{,}21$$

$$s = 0{,}3838$$

Estatística de teste

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{9{,}21 - 9{,}00}{\frac{0{,}3838}{\sqrt{36}}} = 3{,}30$$

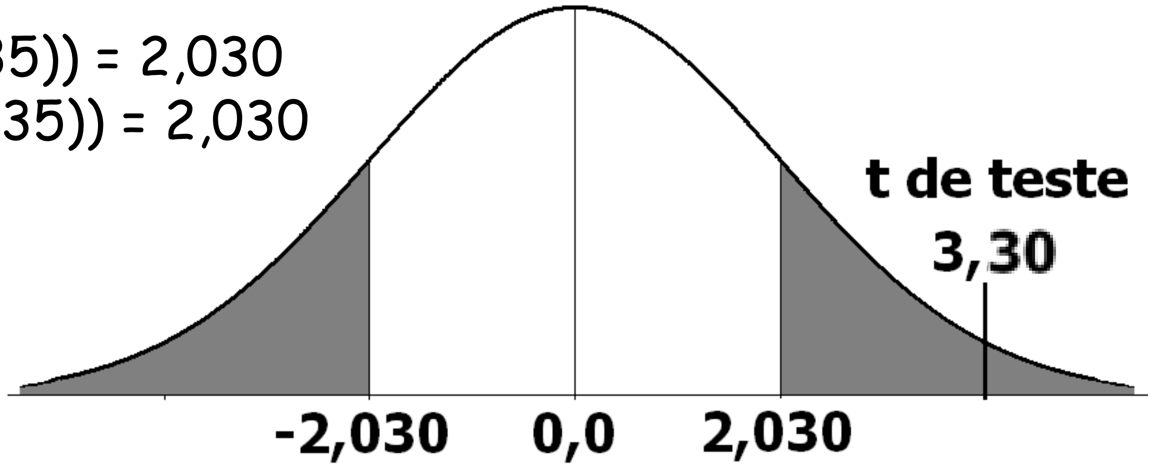
Aplicações

8) Decisão: Para retornar um valor t unicaudal, substituindo probabilidade por 2*probabilidade. Para uma probabilidade de 0,05 e para graus de liberdade iguais a 10, o valor bicaudal é calculado com INVT(0,05;10), que retorna 2,28139. O valor unicaudal para a mesma probabilidade e os mesmos graus de liberdade podem ser calculados com INVT(2*0,05;10), que retorna 1,812462

Valor crítico de t_c => p/ condição BICAUDAL

gl = n - 1 = 36 - 1 = 35, o que significa $t_{c\,;\,0,95}$ = 2,030.

ABS(INV.T(0,025;35)) = 2,030
ou ABS(INVT(0,05;35)) = 2,030



Como t de teste cai na região crítica, a hipótese H_0 tem que ser rejeitada, ou seja, há evidência estatística suficiente, ao nível de significância de 5%, para garantir a rejeição da afirmativa de que a média é 9,0.

Aplicações

Um estudo experimental com um novo tipo de bloco de concreto simples para alvenaria estrutural proporcionou os seguintes resultados de resistência à compressão (em MPa):

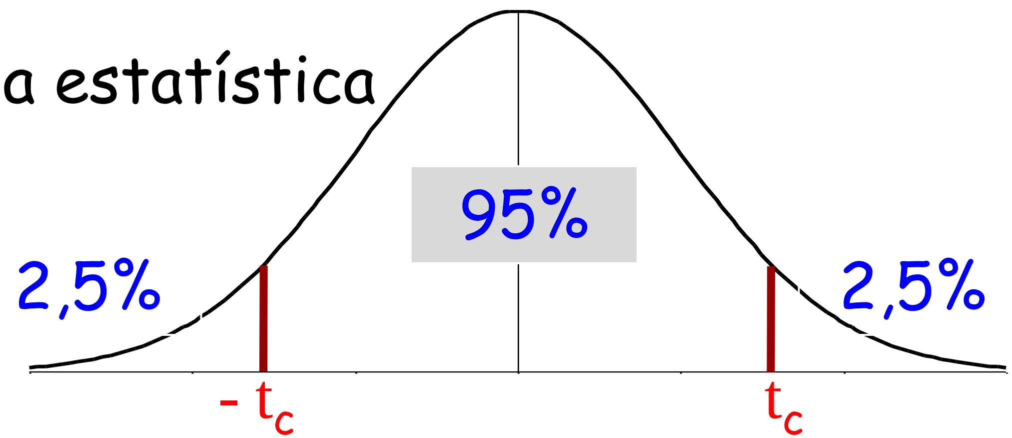
19,8	18,5	17,6	16,7	15,8	15,4	14,1	13,6
11,9	11,4	11,4	8,8	7,5	15,4	15,4	19,5
14,9	12,7	11,9	11,4	10,1	7,9		

A média da amostra é $\overline{X} = 13{,}71$ e o desvio-padrão da amostra é $s = 3{,}55$. Os dados sugerem que a resistência média do bloco exceda a 12 MPa? Considere que a resistência à compressão do bloco tenha uma distribuição normal e use $\alpha = 0{,}05$.

Aplicações

1) Parâmetro de interesse → μ
2) Hipótese nula H_0 → μ = 12 Mpa
3) Hipótese alternativa H_1 → μ > 12 Mpa
4) Nível de significância → α = 0,05
5) Estatística de teste → t (não conhecemos σ)

6) Região de rejeição para a estatística



7) Grandezas amostrais necessárias → $\overline{X} = 13{,}71$ $s = 3{,}55$

Estatística de teste → $$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{13{,}71 - 12}{\frac{3{,}55}{\sqrt{22}}} = 2{,}26$$

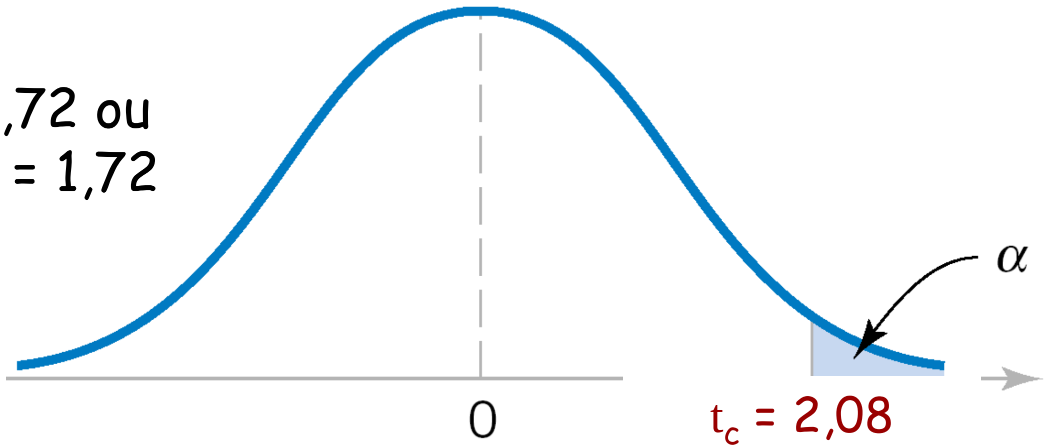
Aplicações

8) Decisão

Valor crítico de t_c

gl = n – 1 = 22 - 1 = 21 → uma cauda α = 0,05 → t_c = 1,72

ABS(INV.T(0,5;21)) = 1,72 ou
ABS(INVT(2*0,05;21)) = 1,72



Uma vez que t = 2,26 > 1,72 , rejeitamos H_0 e concluímos, com um nível de 0,05 de significância, que a resistência à compressão média do bloco excede 12 MPa.

Estimação e teste de hipótese para σ^2

Até o momento, vimos como estimar a média populacional μ e realizar testes de hipótese sobre ela.

Para fazer o mesmo com a variância populacional σ^2, seguiremos o roteiro:

Estimação: estimativa pontual → adotar NC → IC

Teste de hipótese: os 8 passos aplicados à média

Requisitos para estimação e teste de hipótese com a variância populacional σ^2:

1) Amostra aleatória simples
2) A população deve ser normalmente distribuída (mesmo que a amostra seja grande)

Estimação e teste de hipótese para σ^2

Vimos que, quando estimamos a média populacional μ, usamos ou a distribuição normal ou a distribuição t de Student

Para variância e desvio padrão, usaremos outra distribuição → distribuição qui-quadrado

Como é a distribuição qui-quadrado?

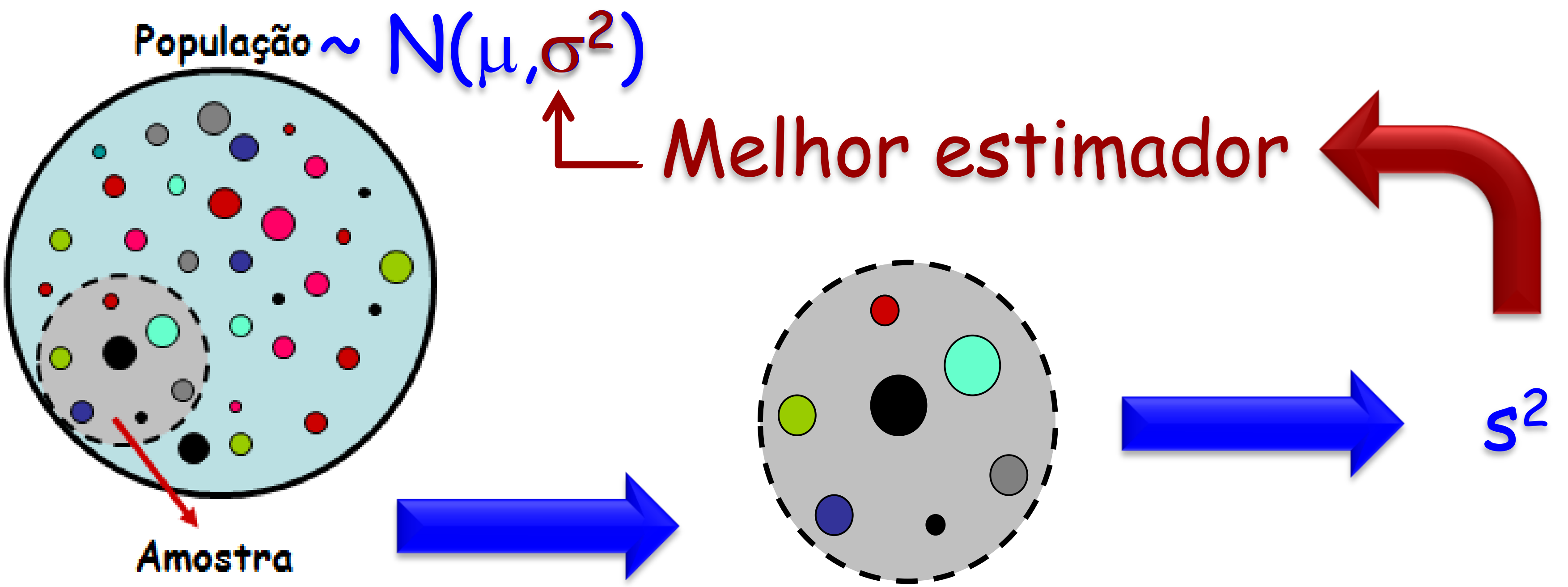
Suponha que selecionamos aleatoriamente amostras independentes de tamanho n de uma população normalmente distribuída com variância populacional σ^2.

Depois calculamos a variância amostral s^2 em cada amostra

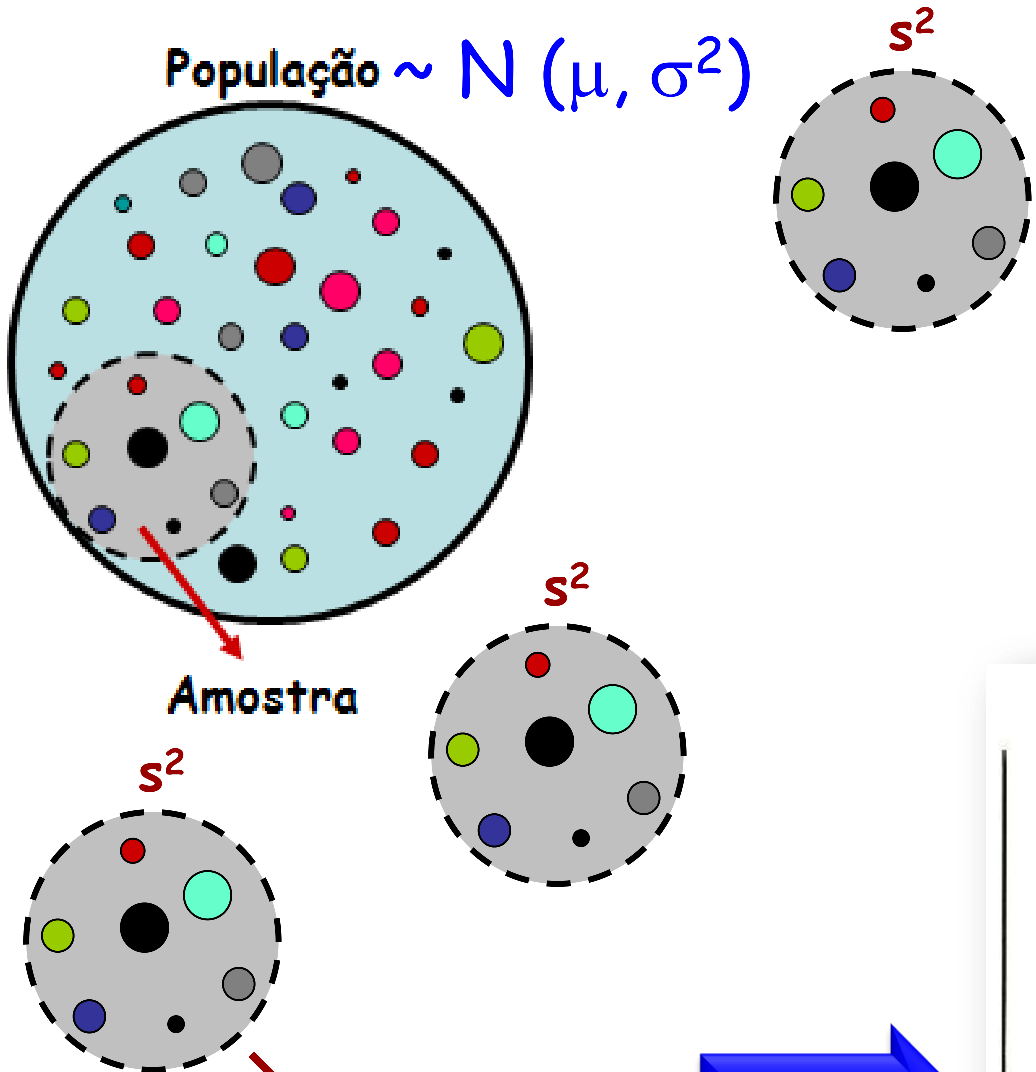
A estatística amostral $\chi^2 = \dfrac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}$ tem uma distribuição chamada distribuição qui-quadrado

Estimação Pontual

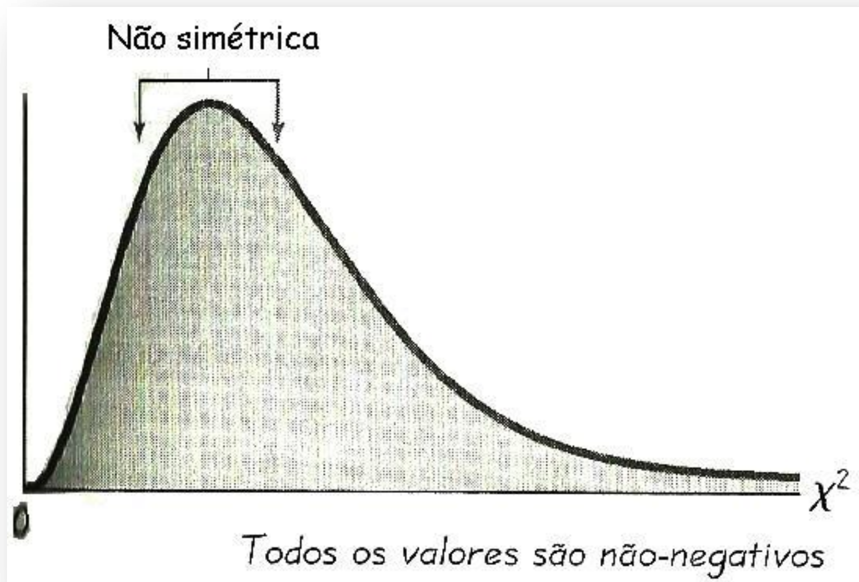
Se X_1, X_2, ..., X_n for uma amostra aleatória de tamanho *n*, proveniente de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2, então a variância da amostra, s^2, será o ENTVM - Estimador Não-Tendencioso de Variância Mínima, para σ^2.



Estimação e teste de hipótese para σ²



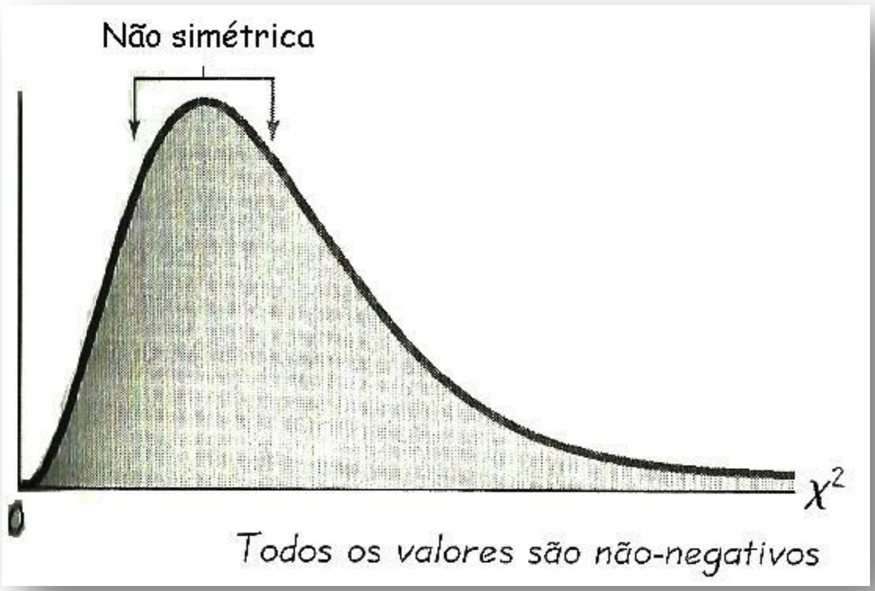
$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}$$

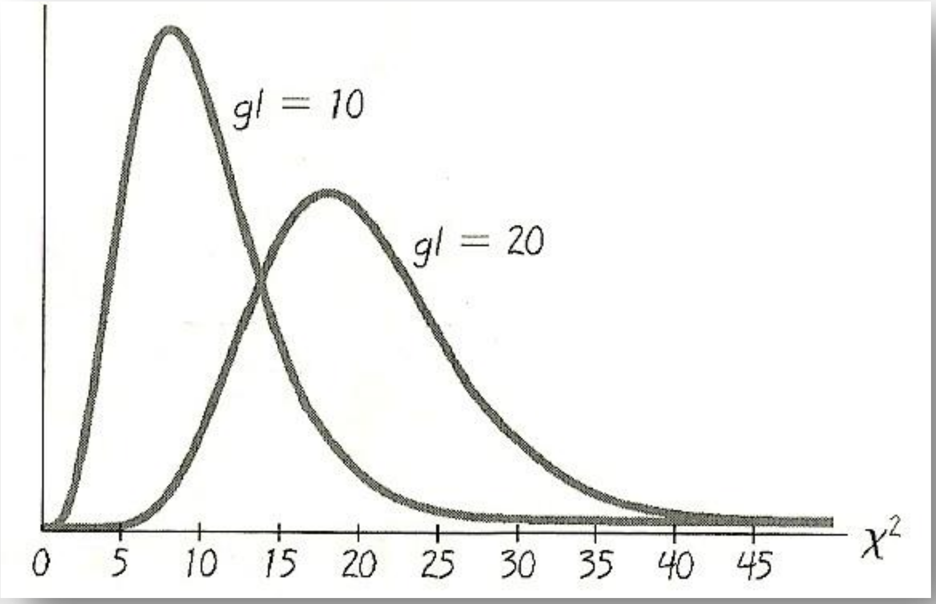


Estimação e teste de hipótese para σ^2

Propriedades da distribuição estatística Qui-Quadrado

1) Ela não é simétrica, mas se torna simétrica com o aumento dos graus de liberdade gl = n – 1
2) Os valores de qui-quadrado podem ser zero ou positivos, mas nunca podem ser negativos
3) Ela se aproxima da distribuição normal com o aumento de gl



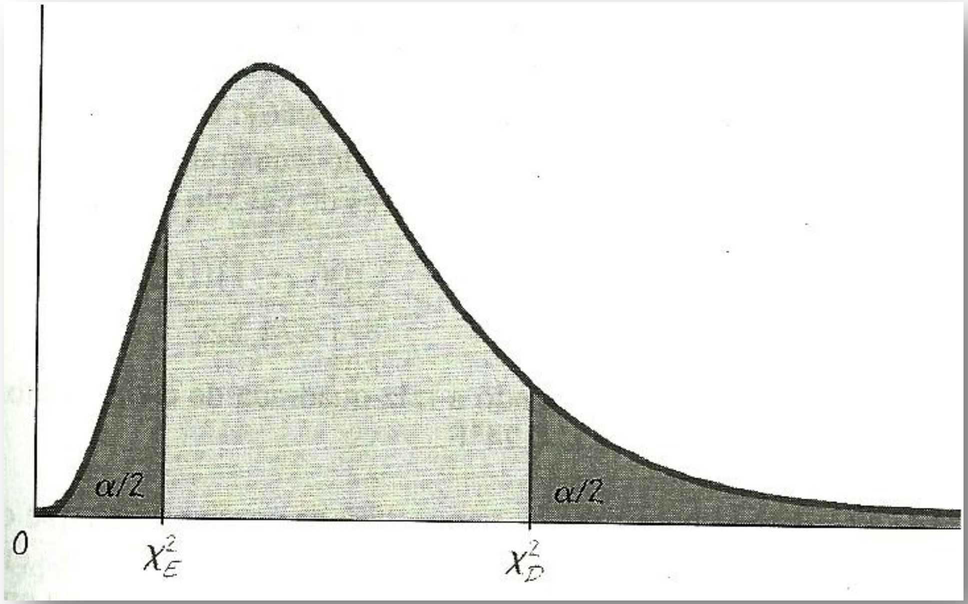


Estimação e teste de hipótese para σ^2

Propriedades da distribuição estatística Qui-Quadrado

Pelo fato de não ser simétrica, diferentemente da média, não podemos fazer

$$s^2 - E < \sigma^2 < s^2 + E$$



Nós calcularemos os limites da esquerda e da direita diretamente

$$Lim_E < \sigma^2 < lim_D$$

Estimação e teste de hipótese para σ^2

Isolando s^2 da equação $\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}$ podemos chegar às equações para os limites da esquerda e da direita

Estamos confiantes $100\cdot(1 - \alpha)\%$ de que σ^2 estará no IC

$$\overbrace{\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_D} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_E}}$$

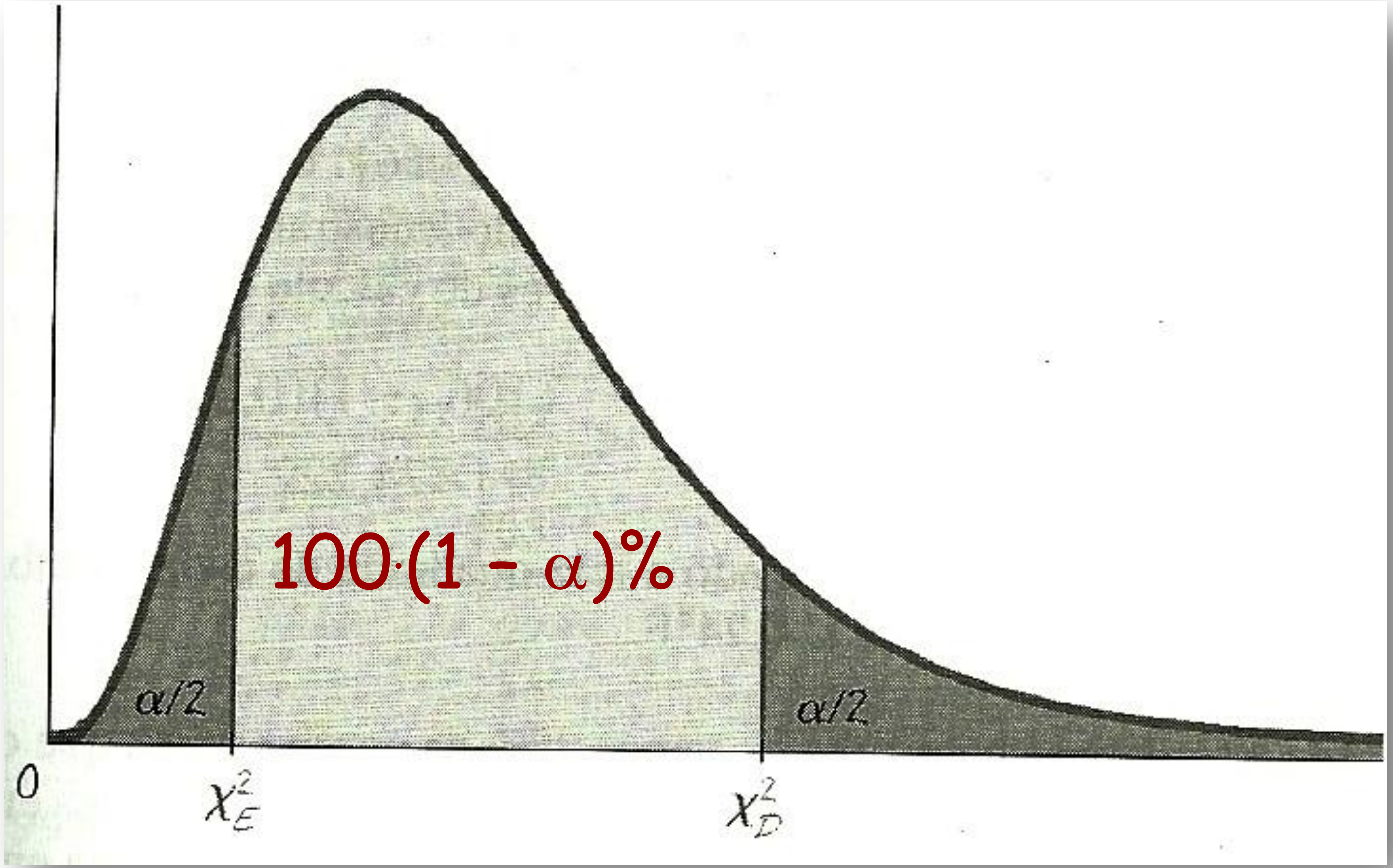
Valor crítico da esquerda

Valor crítico da direita

Valor superior

Valor inferior

Estimação e teste de hipótese para σ^2



$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_D} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_E}$$

Estimação e teste de hipótese para σ^2

Procedimento

1) Verifique se as suposições requeridas são satisfeitas
2) Usando n-1 graus de liberdade, consulte a tabela e ache os valores críticos χ^2_E e χ^2_D, que correspondem ao NC desejado
3) Calcule os limites da esquerda e da direita do IC
4) Se se deseja uma estimativa do IC de σ, tome a raiz quadrada dos limites do passo 3

A suposição de que a população de origem da amostra é normal pode ser feita por:

1 – gráfico dos quantis normais (uso de software) ou

2 – testes de aderência à curva normal

Estimação e teste de hipótese para σ^2

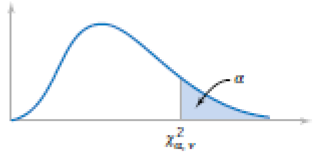
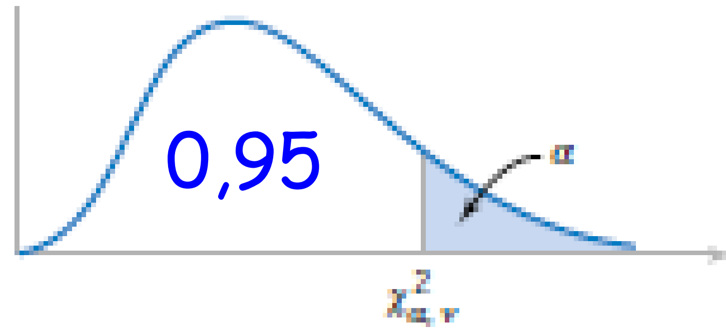


Table III Percentage Points $\chi^2_{\alpha,\nu}$ of the Chi-Squared Distribution

ν \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.500	.100	.050	.025	.010	.005
1	.00+	.00+	.00+	.00+	.02	.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

ν = degrees of freedom.



α = 0,05

Estimação e teste de hipótese para σ^2

E quanto ao teste de hipótese?

De forma semelhante à média:

1) Identificação do parâmetro
2) Hipótese nula H_0
3) Hipótese alternativa H_1
4) Escolha de um nível de significância α e cálculo do score crítico
5) Estatística de teste
6) Região de rejeição para a estatística
7) Cálculo de s^2
8) Decisão

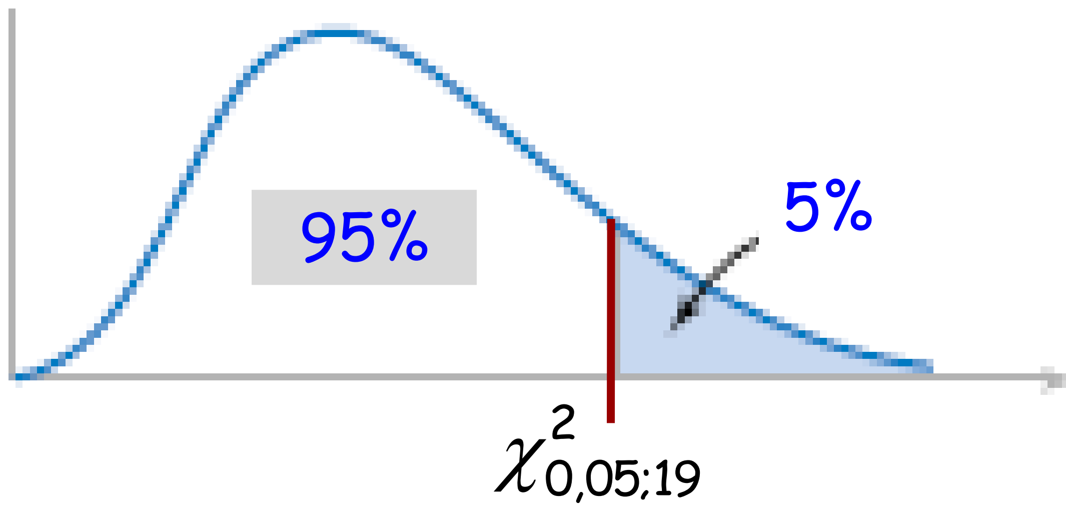
Aplicações

Uma máquina automática de enchimento é usada para encher garrafas com detergente líquido. Uma amostra aleatória de 20 garrafas resulta em uma variância da amostra do volume de enchimento de $s^2 = 0{,}0153$ fl oz (onça fluida). Se a variância do volume de enchimento exceder 0,01 fl oz (*1 onça fluida = 28,413cm³*), existirá uma porção inaceitável de garrafas cujo enchimento não foi completo e cujo enchimento foi em demasia. Há evidência nos dados da amostra sugerindo que o fabricante tenha um problema com garrafas cheias com falta e excesso de detergente? Use $\alpha = 0{,}05$ e Considere que o volume de enchimento tenha uma distribuição normal.

Aplicações

1) Parâmetro de interesse → σ^2
2) Hipótese nula H_0 → σ^2 = 0,01 fl oz (onça fluida)
3) Hipótese alternativa H_1 → σ^2 > 0,01 fl oz (onça fluida)
4) Nível de significância → α = 0,05
5) Estatística de teste → χ^2

6) Região de rejeição para a estatística



Aplicações

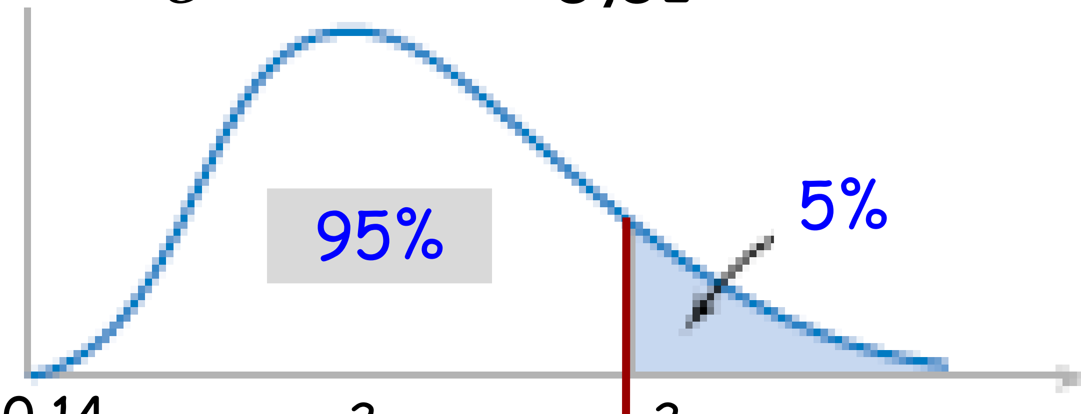
7) Grandezas amostrais necessárias ➡ $s^2 = 0{,}0153$

Estatística de teste ➡ $\chi^2 = \dfrac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2} = \dfrac{19\cdot 0{,}0153}{0{,}01} = 29{,}07$

8) Decisão

Valor crítico χ_c^2

gl = n - 1 = 20 - 1 = 19



INV.QUIQUA.CD(0,05;19) = 30,14

$\chi^2_{0{,}05;19} = \chi_c^2 = 30{,}14$

Uma vez que a estatística de teste 29,07 foi menor que o valor crítico 30,14, concluímos, com um nível de 0,05 de significância, que não há evidência de a a variância do volume de enchimento exceda 0,01 fl oz (*1 onça fluida = 28,413cm³*)

Logo, ACEITA-SE a Ho ➡ $s^2 = 0{,}01\ \text{fl fl oz}$

Estimação e teste de hipótese para proporção

E quanto ao teste de hipótese?

De forma semelhante à média:

1) Identificação do parâmetro
2) Hipótese nula H_0
3) Hipótese alternativa H_1
4) Escolha de um nível de significância α e cálculo do score crítico
5) Estatística de teste
6) Região de rejeição para a estatística
7) Cálculo de po
8) Decisão

Aplicações

A proporção de analfabetos em um município era de 15% na gestão anterior.

No início da atual gestão, o prefeito atual implantou um programa de alfabetização e após 2 anos ele afirma que reduziu a proporção de analfabetos.

Para verificar se a afirmação do prefeito é correta, uma amostra de $n = 60$ cidadãos foram entrevistados, verificando-se a existência de apenas 7 analfabetos.

Ao nível de $\alpha = 5\%$ de significância, calcular a validade das hipóteses:

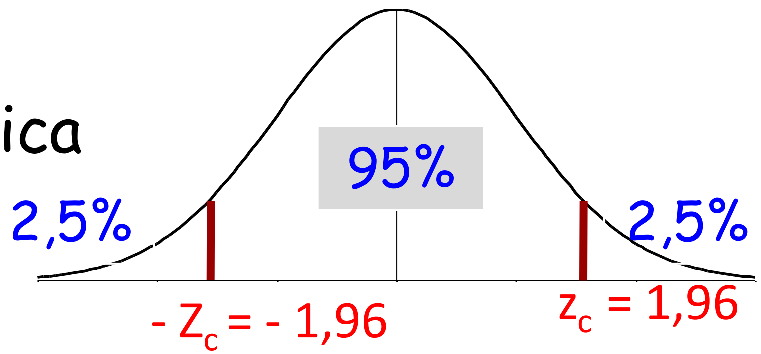
Ho: $p = 0{,}15$ - a proporção de analfabetos no município não se alterou, ou seja, a afirmação do prefeito está INCORRETA;

H1: $p < 0{,}15$ – a proporção de analfabetos do município diminuiu, ou seja, a afirmação do prefeito está CORRETA.

Aplicações

1) Parâmetro de interesse → p
2) Hipótese nula H_0 → p = 0,15
3) Hipótese alternativa H_1 → p < 0,15
4) Nível de significância → α = 0,05
5) Estatística de teste → $Z\alpha$

6) Região de rejeição para a estatística



INV.NORMP (0,975) = 1,96

7) Grandezas amostrais necessárias → $f = 7/60$ → $\boldsymbol{f = 0,12}$

Estatística de teste

$$Z = \frac{f - p_o}{\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}}$$

f = frequencia relativa do evento na amostra;
p_o = valor da hipótese nula (H_o);
n = tamanho da amostra.

Z = -0,72

8) Decisão *NÃO Rejeitar a hipótese de que o índice de analfabetismo foi mantido, significando que a afirmação do prefeito é INCORRETA.*

Teste de hipótese p/ diferença de média

a) sendo a variância populacional (σ^2) conhecida.

Estatística de teste

$$Z = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Sendo $\mathbf{H_o}$: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

b) sendo a variância populacional (σ^2) desconhecida.

Estatística de teste

$$t = \frac{X_1 - X_2}{S_p^2 * \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 * n_2}}}$$

Sendo $\mathbf{H_o}$: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

onde: $S_p^2 = \left\{ \frac{[(n_1 - 1) * s_1^2] + [(n_2 - 1) * s_2^2]}{(n_1 + n_2 - 2)} \right\}$

Aplicações

Um fabricante de pneus faz dois tipos. O tipo A tem, $\sigma = 2.500$ e o tipo B, $\sigma = 3.000$ milhas. Uma empresa de taxi testou 50 pneus do tipo A e 40 pneus do tipo B, obtendo 24.000 e 26.000 milhas de duração média nos respectivos tipos de pneus. Adotando-se um risco de 4%, testar a hipótese de que a vida média dos dois tipos de pneus é igual.

Ho: $\mu_A - \mu_B = 0$ *ou que,* $\mu_A = \mu_B$;

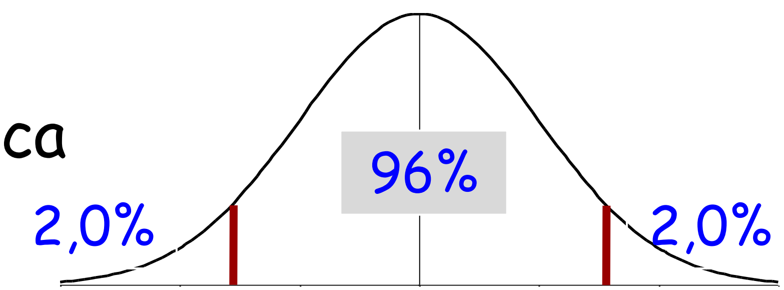
H1: $\mu_A \neq \mu_B$.

Aplicações

a) sendo a variância populacional (σ^2) conhecida.

1) Parâmetro de interesse → $\mu_1 - \mu_2$
2) Hipótese nula H_0 → $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou $\mu_1 = \mu_2$
3) Hipótese alternativa H_1 → $\mu_1 \neq \mu_2$
4) Nível de significância → $\alpha = 0{,}04$
5) Estatística de teste → $Z\alpha$

6) Região de rejeição para a estatística



INV.NORMP (0,98) = 2,05

$-z_c = -2{,}05$ $z_c = 2{,}05$

7) Grandezas amostrais necessárias → $\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2 = 24.000 - 26.000$

$\sigma_1 = 2.500$; $\sigma_2 = 3.000$; $n_1 = 50$; $n_2 = 40$

Estatística de teste

$$Z = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$\mathbf{Z = -3{,}38}$

8) Decisão

Rejeita a hipótese pois, $\mathbf{Z < Z_c}$.

Aplicações

Dois tipos de tinta foram testados sob as mesmas condições meteorológicas. O tipo A registrou uma média 80 com um desvio de 5 em 5 partes. O tipo B, uma média 83 com desvio de 4 em 6 partes. Adotando-se um α = 5%, testar a hipótese da igualdade das médias.

$$\textbf{\textit{Ho}}: \mu_A - \mu_B = 0 \quad \textit{ou que}, \quad \mu_A = \mu_B\,;$$

$$\textbf{\textit{H1:}}\ \mu_A \neq \mu_B\,.$$

Aplicações

b) sendo a variância populacional (σ^2) desconhecida.

1) Parâmetro de interesse → $\mu_1 - \mu_2$

2) Hipótese nula H_0 → $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou $\mu_1 = \mu_2$

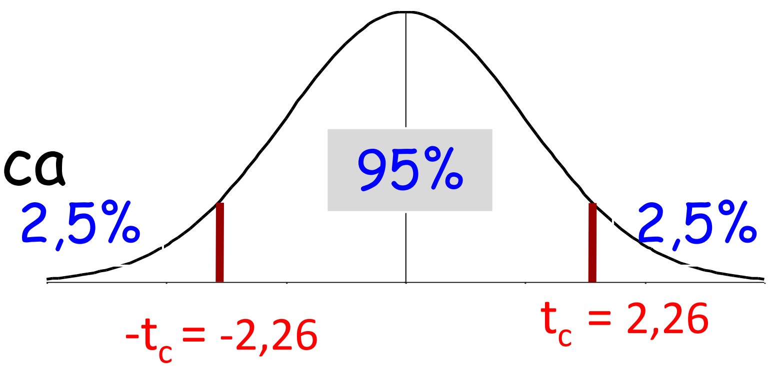
3) Hipótese alternativa H_1 → $\mu_1 \neq \mu_2$

4) Nível de significância → $\alpha = 0{,}05$

5) Estatística de teste → $t\alpha$

6) Região de rejeição para a estatística

INVT(0,05;5+6-2) = 2,26



7) Grandezas amostrais necessárias → $\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2 = 80 - 83$

$s_1 = 5$; $s_2 = 4$; $n_1 = 5$; $n_2 = 6$

$$S_p^2 = \left\{ \frac{[(n_1 - 1) * s_1^2] + [(n_2 - 1) * s_2^2]}{(n_1 + n_2 - 2)} \right\} \qquad S_p^2 = 4{,}47$$

Estatística de teste

$$\boxed{t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p^2 * \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 * n_2}}}} \qquad t = -1{,}12$$

8) Decisão

Não Rejeitar a hipótese ***Ho:*** *pois,* $t > t_c$.

Aplicações

F I M